Institut für Telematik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Prof. Dr. M. Zitterbart
Dr. I. Baumgart
Dipl.-Inform. J. Wilke

Algorithmen I
Sommersemester 2011

3. Übungsblatt
Hashing, Heaps

Aufgabe 1

Hashkollisionen

Die Grundmenge K bestehe aus nicht-negativen ganzen Zahlen, dargestellt als

$$e \in K, \text{ mit } e = \sum_{i=0}^{\lfloor \log_{10} e \rfloor} a_i 10^i,\ a_i \in \{0, \ldots, 9\}$$

Die Hashfunktion h sei für $e \in K$ definiert als

$$h(e) = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \log_{10} e \rfloor} a_i \right) \mod m$$

(a) Geben Sie für $m = 11$ eine einstellige, eine zweistellige, ..., eine achtstellige Zahl an, wobei alle Zahlen den gleichen Funktionswert 2 erzielen sollen. Führende Nullen sind nicht erlaubt. (4P.)

(b) Welche Probleme können sich bei Verwendung dieser Hashfunktion für eine Hashtabelle ergeben? (1P.)

Aufgabe 2

Kollisionsauflösung

Betrachten Sie das Einfügen der Schlüssel 10,22,31,4,15,28,17,88,59 in eine Hashtabelle der Länge $m = 11$. Geben Sie jeweils die Tabelle nach dem Einfügen von 59 an.

(a) Verwenden Sie zunächst Hashing mit verketteten Listen mit der Hashfunktion $h(k) = k \mod m$. (3P.)

(b) Verwenden Sie Hashing mit linearem Sondieren und $h'(k) = k$. (3P.)

(c) Verwenden Sie Hashing mit quadratischem Sondieren und $h'(k) = k$, $c_1 = 1$ sowie $c_2 = 3$. (4P.)

(d) Verwenden Sie doppeltes Hashing mit $h_1(k) = k$ und $h_2(k) = 1 + (k \mod (m-1))$. (4P.)

(e) Geben Sie die Anzahl der beim Einfügen betrachteten Hashtabellenplätze für jedes der Verfahren an. (4P.)

(f) Nehmen Sie an, dass nach jedem Datum mit gleicher Wahrscheinlichkeit gesucht wird. Welche Kosten sind für das jeweilige Verfahren für eine erfolgreiche Suche zu erwarten? (4P.)

Aufgabe 3

Hashing mit verketteten Listen

Das Institut für abgewandtes Rechnen begeht sein Sommerfest in einem nahen Biergarten. Nach dem dritten Glas Bier behauptet einer der Mitarbeiter, man könne Hashing mit verketteten Listen entscheidend verbessern, indem man die verketteten Listen stets sortiert halte.

(a) Ist diese Behauptung richtig? Diskutieren Sie hierzu, wie sich das Laufzeitverhalten von *HASH-INSERT*, *HASH-DELETE* und *HASH-SEARCH* im Worst-Case in diesem Fall ändert. (3P.)

(b) Verwenden Sie statt sortierter verketteter Listen nun sortierte unbeschränkte Felder. Welche Laufzeiten können *HASH-INSERT*, *HASH-DELETE* und *HASH-SEARCH* nun im Worst-Case erreichen? (4P.)

Aufgabe 4

Binäre Heaps

(a) Nehmen Sie die letzten 4 Ziffern Ihrer Matrikelnummer und bilden Sie daraus alle möglichen binären Min-Heaps. Stellen Sie dabei die Heaps als Array dar. (4P.)

(b) Beweisen Sie per Induktion, dass Binäre Heaps mit n Elementen genau $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ Ebenen hoch sind. Gehen Sie dabei von einem Heap in Binärbaum Repräsentation aus. (12P.)

Aufgabe 5

Heapsort

(a) Erstellen Sie aus dem unsortierten Feld A einen Min-Heap mit einer der beiden in der Vorlesung vorgestellten Methoden. (5P.)

A:

16	2	4	8	5	12	10	3	7

(b) Sortieren Sie A mit Heap-Sort wie in der Vorlesung vorgestellt. Schreiben Sie das Feld nach jeder Vertauschung oder anderem wichtigen Schritt auf. Beachten Sie, dass das Feld **absteigend** sortiert werden soll. (5P.)

Abgabe des Übungsblattes bis Mittwoch, 25.5.2011 – 12 Uhr durch Einwurf in den entsprechenden Briefkasten im Gebäude 50.34, 1. UG.